Komplexe trigonometrische Formeln

Polardarstellung einer komplexen Zahl: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Eulersche Funktion: $E(\varphi) = \text{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Eulersche Formel: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i \cdot \varphi}$

Exponentielle Form: $E(\varphi) = e^{i\varphi}$

$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

Komplexe Exponentialfunktion: $\boxed{f(z) = e^{z} = e^{x} \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))}$

Ist z reell (y = 0), dann folgt $f(z) = e^{x} \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = e^{x} \cdot (1 + i \cdot 0) = e^{x}$

ist z imaginär (x = 0), dann folgt $f(z) = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ mit $|f(z)| = 1$

f ist periodisch: $e^{z+i \cdot k \cdot 2\pi} = e^{z} \cdot \left(\underbrace{\cos(k \cdot 2\pi)}_{1} + i \cdot \underbrace{\sin(k \cdot 2\pi)}_{0}\right) = e^{z}$

Spezielle Werte: $e^{z+i\pi} = e^{z} \cdot \left(\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\right) = -e^{z}$

$e^{i\pi} = -1$ und $e^{2\pi i} = 1$ und $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i$

Komplexe Sinusfunktion: $\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$, $\boxed{\sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i}}$

$\sin(i) = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \approx 1{,}175$

Komplexe Kosinusfunktion: $\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$, $\boxed{\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}}$

$\cos(i) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$

Konjugiert Komplex: $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$ $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$

Komplexe Funktion sinh(z): $\boxed{\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}}$ $\boxed{i \cdot \sinh(x) = \sin(ix)}$

$\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{i} \cdot \sin(ix) = -i \cdot \sin(ix)}$

Periode: $\sinh(z + 2k\pi \cdot i) = \sinh(z)$, $\sinh(z + \pi i) = -\sinh(z)$

Nullstellen: $\sinh(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = k \cdot \pi i}$

Komplexe Funktion cosh(z): $\boxed{\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}$ $\boxed{\cosh(x) = \cos(ix)}$

Periode: $\cosh(z + 2k\pi \cdot i) = \cosh(z)$. $\cosh(z + \pi i) = -\cosh(z)$

Nullstellen: $\cosh(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = (2k+1)\frac{\pi}{2} \cdot i}$

Konjugiert Komplex: $\overline{\sinh(z)} = \sinh(\overline{z})$ $\overline{\cosh(z)} = \cosh(\overline{z})$

Additionstheoreme:

$$\sin(x + iy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + i \cdot \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\cos(x + iy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \cdot \sin(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\sinh(x + iy) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + i \cdot \cosh(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + i \cdot \sinh(x) \cdot \sin(y)$$